

Лекция №7

2.5. Смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего (процесс авторегрессии с остатками в виде скользящего среднего)

ARMA(p,q):

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \dots + a_p X_{t-p} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + \dots + b_q \epsilon_{t-q}, \quad a_p \neq 0, \quad b_q \neq 0, \quad \epsilon_t - \text{белый шум} \quad (1)$$

Процесс X_t с нулевым математическим ожиданием, принадлежащий такому классу процессов, характеризуется порядками p и q его AR и MA составляющих и обозначается как процесс **ARMA(p, q)** (**autoregressive moving average, mixed autoregressive moving average**). Более точно, процесс X_t с нулевым математическим ожиданием принадлежит классу $ARMA(p, q)$, если:

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q b_j \epsilon_{t-j}, \quad a_p \neq 0, \quad b_p \neq 0, \quad \mathbb{E} X_t = 0 \quad (2)$$

где ϵ_t – процесс белого шума и $b_0 = 1$. В операторной форме последнее соотношение имеет вид

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p) \quad (3)$$

$$b(L) = 1 + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_q L^q \quad (4)$$

$$a(L)X_t = b(L)\epsilon_t, \quad (5)$$

т.е. $a(L)$ и $b(L)$ имеют тот же вид, что и в определенных ранее моделях $AR(p)$ и $MA(q)$. Если процесс имеет постоянное математическое ожидание μ , то он является процессом типа $ARMA(p, q)$, если

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^p a_j (X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=0}^q b_j \epsilon_{t-j} \quad (\mathbb{E} X_t = \mu \neq 0) \quad (6)$$

Отметим следующие свойства процесса $ARMA(p, q)$ в широком смысле с $\mathbb{E}(X_t) = \mu$.

- Процесс стационарен, если все корни уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$
- Если процесс стационарен, то существует эквивалентный ему процесс $MA(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}, \quad c_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty \quad (7)$$

или

$$X_t - \mu = c(L)\epsilon_t, \quad \text{где} \quad c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \frac{b(z)}{a(z)} \quad (8)$$

- Если все корни уравнения $b(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ (**условие обратимости**), то существует эквивалентное представление процесса X_t в виде процесса авторегрессии бесконечного порядка $AR(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (X_{t-j} - \mu) + \epsilon_t, \quad (9)$$

или

$$d(L)(X_t - \mu) = \epsilon_t, \quad \text{где} \quad d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)} \quad (10)$$

Отсюда вытекает, что стационарный процесс $ARMA(p, q)$ всегда можно аппроксимировать процессом скользящего среднего достаточно высокого порядка, а при выполнении условия обратимости его можно также аппроксимировать процессом авторегрессии достаточно высокого порядка.

Специфику формы коррелограммы процесса $ARMA(p, q)$ в общем случае указать труднее, чем для моделей $AR(p)$ и $MA(q)$. Отметим только, что для значений $k > q$ коррелограмма процесса $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$ выглядит так же, как и коррелограмма процесса авторегрессии $a(L)X_t = \epsilon_t$. Так, для процесса $AR(1)$:

$$\rho(k) = a^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Для процесса $ARMA(1, 1)$:

$$\rho(k) = a_1 \rho(k-1) \quad k = 2, 3, \dots \quad (12)$$

как и у процесса $X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t$. При этом, однако, $\rho(1) \neq a_1$.

Предпосылкой для обоснования использования моделей $ARMA$ является следующий факт. Если $ARMA(p_1, q_1)$ ряд X_t и $ARMA(p_2, q_2)$ ряд Y_t статистически независимы между собой, и $Z_t = X_t + Y_t$, то типичным является положение, когда Z_t является $ARMA(p, q)$ рядом, у которого:

$$p = p_1 + p_2, \quad (13)$$

$$p = p_1 + q_2, \quad p_1 + q_2 > p_2 + q_1 \quad (14)$$

$$p = p_2 + q_1, \quad p_2 + q_1 > p_1 + q_2 \quad (15)$$

Возможны также ситуации, когда значения p и q оказываются меньше указанных значений. (Такие ситуации возникают в случаях, когда многочлены $a_X(z)$ и $a_Y(z)$, соответствующие авторегрессионным частям процессов X_t и Y_t , имеют общие корни.)

В частном случае, когда оба ряда имеют тип $AR(1)$, но с различными параметрами, их сумма имеет тип $ARMA(2, 1)$.

$$X_t \sim AR(1), Y_t \sim AR(1) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(2, 1) \quad (16)$$

В экономике многие временные ряды являются агрегированными. Из указанного выше факта вытекает, что если каждая из компонент отвечает простой модели AR , то при независимости этих компонент их сумма будет $ARMA$ процессом. Такого же рода процесс мы получим, если часть компонент имеет тип AR , а остальные компоненты имеют тип MA . Единственным исключением является случай, когда все компоненты являются MA процессами – в этом случае в результате получаем MA процесс.

Предположим, наконец, что “истинный” экономический ряд отвечает $AR(p)$ модели, но значения этого ряда измеряются со случайными ошибками, образующими процесс белого шума (т.е. $MA(0)$). Тогда наблюдаемый ряд имеет тип $ARMA(p, p)$.

$$X_t \sim AR(p), Y_t \sim AR(0) \Rightarrow z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(p, p) \quad (17)$$

Замечание

$$\sum AR \rightarrow ARMA \quad (18)$$

$$\sum AR + \sum MA \rightarrow ARMA \quad (19)$$

$$\sum MA \rightarrow MA \quad (20)$$

Ранее мы уже говорили о том, что если $ARMA(p, q)$ процесс X_t удовлетворяет условию обратимости, то его можно представить в виде стационарного процесса $AR(\infty)$. Последний, в свою очередь, можно аппроксимировать стационарным процессом $AR(p)$, быть может, достаточно высокого порядка.

Таким образом, в практических задачах можно было бы и вовсе обойтись без использования моделей $ARMA$, ограничиваясь либо AR либо MA моделями. При этом, однако, количество коэффициентов, подлежащих оцениванию, может оказаться слишком большим (что снижает точность оценивания) и даже превосходить количество имеющихся наблюдений. В этом смысле модели $ARMA$ могут быть “**более экономными**”.

2.6. Модели $ARMA$, учитывающие наличие сезонности

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q b_j \epsilon_{t-j}, \quad \text{где } b_0 = 1, a_p \neq 0, b_q \neq 0, \epsilon_1 - \text{белый шум} \quad (21)$$

Если наблюдаемый временной ряд обладает выраженной сезонностью, то модель $ARMA$, соответствующая этому ряду, должна содержать составляющие, обеспечивающие проявление сезонности в порождаемой этой моделью последовательности наблюдений. Для квартальных данных чисто сезонными являются стационарные модели *сезонной авторегрессии первого порядка* ($SAR(1)$).

$$X_t = a_4 X_{t-4} + \epsilon_t, \quad a_4 < 1 \quad (22)$$

и *сезонного скользящего среднего первого порядка* ($SMA(1)$).

$$X_t = \epsilon_t b_4 \epsilon_{t-4}. \quad (23)$$

В первой модели автокорреляционные функции:

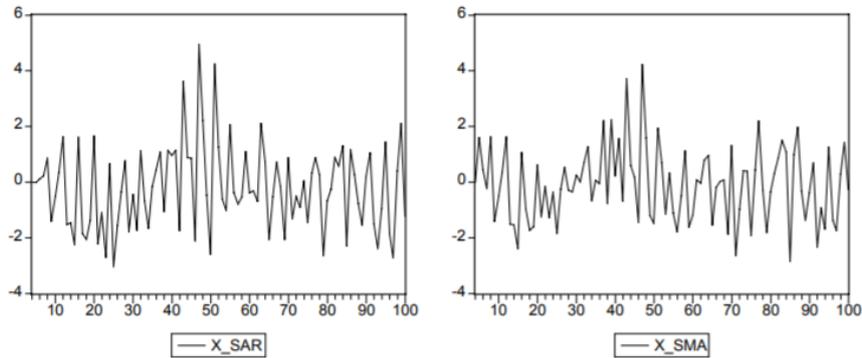
$$\rho(k) = a_4^{k/4}, \quad \text{для } k = 4m, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

$$\rho(k) = 0 \quad \text{для остальных } k > 0. \quad (25)$$

Во второй модели

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(4) = b_4, \quad \rho(k) = 0 \quad \text{для остальных } k > 0. \quad (26)$$

Ниже приведены смоделированные реализации модели SAR(1) с $a_4 = 0.8$ и модели SMA(1) с $b_4 = 0.8$.



Комбинации несезонных и сезонных изменений реализуются, например, в моделях $ARMA((1, 4), 1)$ и $ARMA(1, (1, 4))$. Такие модели носят название аддитивных сезонных моделей.

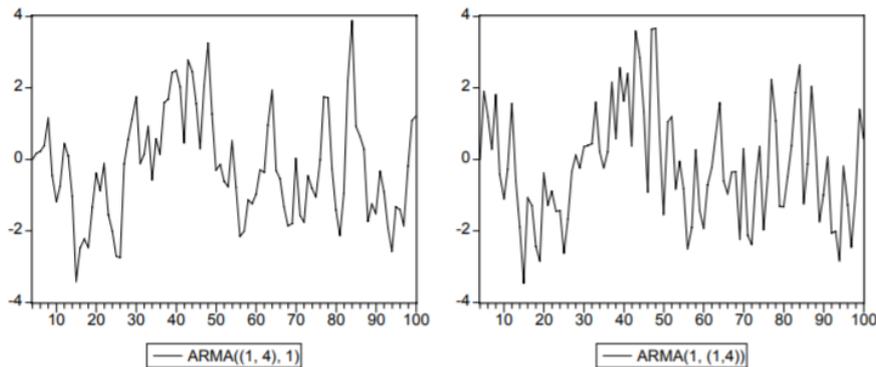
$ARMA((1, 4), 1)$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} \quad (27)$$

$ARMA(1, (1, 4))$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \epsilon_t + b_1 \epsilon_{t-1} + b_4 \epsilon_{t-4}. \quad (28)$$

Следующие два графика показывают поведение смоделированных реализаций таких рядов при $a_1 = 2/3$, $a_4 = 1/48$, $b_4 = 1/5$ у первого ряда и при $a_1 = 0.4$, $b_1 = 0.3$, $b_4 = 0.8$ у второго ряда. Таким образом можно так подобрать коэф-ты моделей, что эти реализации будут очень близки.



Заметим, что для первой модели уравнение $a(z) = 0$ принимает вид $1 - 2/3z + 1/48z^4 = 0$, т.е. $z^4 - 32z + 48 = 0$; корни этого уравнения $z_1 = 2$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2 + i\sqrt{8}$, $z_4 = -2 - i\sqrt{8}$ лежат вне единичного круга, что обеспечивает стационарность рассматриваемого процесса. Во второй модели $a(z) = 0$ принимает вид $1 - 0.4z = 0$; корень этого уравнения $z = 2.5 > 1$, так что и эта модель стационарна.

Кроме рассмотренных примеров аддитивных сезонных моделей, употребляются также и мультипликативные спецификации, например,

$$(1 - a_1L)X_t = (1 + b_1L)(1 + b_4L_4)\epsilon_t,$$

$$(1 - a_1L)(1 - a_4L^4)X_t = (1 + b_1L)\epsilon_t.$$

Первая дает

$$X_t = a_1X_{t-1} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + b_4\epsilon_{t-4} + b_1b_4\epsilon_{t-5}, \quad (29)$$

а вторая

$$X_t = a_1X_{t-1} + a_4X_{t-4} - a_1a_4X_{t-5} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} \quad (30)$$

В первой модели допускается взаимодействие составляющих скользящего среднего на лагах 1 и 4 (т.е. значений ϵ_{t-1} и ϵ_{t-4}), а во второй – взаимодействие авторегрессионных составляющих на лагах 1 и 4 (т.е. значений X_{t-1} и X_{t-4}). Конечно, эти две модели являются частными случаями аддитивных моделей

$$X_t = a_1X_{t-1} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + b_4\epsilon_{t-4} + b_5\epsilon_{t-5}$$

$X_t = a_1X_{t-1} + a_4X_{t-4} - a_5X_{t-5} + \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1}$. с $b_5 = b_1b_4$, $a_5 = -a_1a_4$. При приближенном выполнении последних соотношений (по крайней мере, если гипотезы о наличии таких соотношений не отвергаются), естественно перейти от оценивания аддитивной модели к оцениванию мультипликативной модели, опять следуя *принципу “экономности”* модели (*“parsimony model”*). Впрочем, каких-либо теоретических оснований, ведущих к предпочтению одной формы сезонности перед другой (мультипликативной или аддитивной), не существует.

Замечание 7.1.3. Пусть X_t - процесс типа $ARMA(p, q)$, $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$. Выше отмечалось, что если все корни алгебраического уравнения $a(z) = 0$ лежат вне единичного круга $|z| \leq 1$ на комплексной плоскости, то X_t - стационарный процесс. Но такой процесс может быть стационарным и в случае, когда уравнение $a(z) = 0$ имеет корень z с $|z| = 1$. Поясним это следующим простым примером.

Пусть $X_t = X_{t-1}$:

$$X_t - X_{t-1} = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}. \quad (31)$$

Последнее выражение записывается в виде:

$$(1 - L)X_t = (1 - L)\epsilon_t, \quad (32)$$

т.е. $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$, где $a(L) = 1 - L$ и $b(L) = 1 - L$. Иными словами, для процесса X_t получили $ARMA(1, 1)$ представление

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}, \quad (33)$$

для которого уравнение $a(z) = 0$ имеет корень $|z| = 1$.

Замечание 7.1.4. В общем случае, если у $ARMA(p, q)$ процесса X_t , $a(L)X_t = b(L)\epsilon_t$, многочлены $a(z)$ и $b(z)$ не имеют общих корней, условие нахождения всех корней уравнения $a(z) = 0$ вне единичного круга $|z| \leq 1$ является *необходимым и достаточным* для стационарности процесса X_t .

Замечание 7.1.5. Представить в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка можно не только стационарный процесс X_t типа $ARMA(p, q)$, но фактически и любой стационарный процесс, встречающийся на практике. Это вытекает из так называемого **разложения Вольда** (*Wold's decomposition*).

Вольд в работе (Wold, 1938) показал, что любой стационарный в широком смысле процесс X , с нулевым математическим ожиданием может быть представлен в виде:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j} + Z_t, \quad (34)$$

где $c_0 = 1$ и $\sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < \infty$, ϵ_t - процесс белого шума, Z_t - стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием, $Cov(Z_t, \epsilon_{t-j}) = 0$ для всех j , и значение Z_t можно сколь угодно точно предсказать на основании линейной функции от прошлых значений процесса $X_t : X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

Тем самым стационарный процесс X_t представляется в виде суммы двух компонент: **линейно недетерминированной** (*linearly indeterministic*) компоненты $\sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}$ и **линейно детерминированной** (*linearly deterministic*) компоненты Z_t . Если вторая компонента в разложении Вольда отсутствует, т.е. $Z_t \equiv 0$, то процесс называется **чисто линейно недетерминированным** (*purely linearly indeterministic*).

Таким образом, если стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием является чисто линейно недетерминированным, то он представим в виде процесса скользящего среднего бесконечного порядка

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}, \quad \text{где} \quad c_0 = 1, \sum_{j=0}^{\infty} c_j^2 < \infty. \quad (35)$$

В качестве тривиального примера линейно детерминированного стационарного процесса с нулевым средним можно указать на модель случайного уровня:

$$X_t = X_0, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (36)$$

где X_0 - случайная величина, имеющее нулевое математическое ожидание и конечную дисперсию.

В практических исследованиях обычно сразу предполагают отсутствие линейно детерминированной компоненты.